Observations biométriques

Par

Dezydery Szymkiewicz

VI. Les fonctions B de Charlier

L'astronome suédois Charlier a publié deux mémoires remarquables sur les fonctions servant à l'interpolation des fréquences des erreurs d'observation 1. Ces fonctions peuvent être utiles aussi pour l'interpolation des différents autres matériaux statistiques. Le premier de ces mémoires s'occupe du cas, quand la courbe des fréquences est bilatérale. Pour ce problème, Charlier propose les fonctions "du type A" qui sont une généralisation de la fonction normale de probabilité établie par de Moivre, indûment attribuée à Gauss. Dans le second mémoire, est considérée l'unilatérale distribution des fréquences. Pour ce cas, l'auteur propose les fonctions "du type B" qui sont une généralisation de la fonction de Poisson, dont l'utilité pour la statistique a été mise en évidence dans le mémoire connu de Bortkiewicz "Das Gesetz der kleinen Zahlen". Ces fonctions que j'appellerai simplement "fonctions B" sont très utiles pour la statistique biologique. Leur application aux problèmes biométriques étant rare, il est nécessaire de s'en occuper davantage.

La fonction de Poisson qui est la base des fonctions B a la forme

$$\psi_0(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

où λ est une constante. Cette fonction est nulle pour les valeurs négatives de la variable indépendante et égale à $e^{-\lambda}$ pour x=0.

La fonction B de Charlier a la forme de la somme infinie

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \varkappa_2 \Delta^2 \psi_0(x) + \varkappa_3 \Delta^3 \psi_0(x) + \varkappa_4 \Delta^4 \psi_0(x) + \dots$$

Die zweite Form des Fehlergesetzes. — l. c. N 26.

¹ Über das Fehlergesetz — Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium N 25.

Dans cette somme figurent les différences finies de deuxième, troisième et supérieurs ordres définies par les équations:

$$\begin{array}{l} \varDelta \psi_0(x) = \psi_0(x) - \psi_0(x-1) \\ \varDelta^2 \psi_0(x) = \varDelta \psi_0(x) - \varDelta \psi_0(x-1) = \psi_0(x) - 2\psi_0(x-1) + \psi_0(x-2) \\ \varDelta^3 \psi_0(x) = \varDelta^2 \psi_0(x) - \varDelta^2 \psi_0(x-1) = \psi_0(x) - 3\psi_0(x-1) + 3\psi^0(x-2) - \psi_0(x-3) \end{array}$$

Les coefficients $\varkappa_2, \varkappa_3, \dots$ sont des constantes.

Charlier n'a pris que deux premiers termes de cette série. Je vais montrer que dans beaucoup de cas le troisième terme est aussi indispensable.

Le problème considéré étant peu connu aux biologistes, je vais le traiter en entier. Je prends pour base ce principe fondamental de la théorie d'interpolation qu'on peut formuler de la manière suivante. La moyenne arithmétique des valeurs de la fonction servant à l'interpolation doit être égale à la moyenne des nombres à interpoler et en outre les moments par rapport à cette moyenne doivent être égaux pour les valeurs de la fonction et pour les nombres considérés. Il suffit ici de prendre le deuxième et le troisième moments.

La fonction de Poisson étant nulle pour les valeurs négatives de la variable indépendante, on n'en prend que la valeur zéro et les valeurs positives. Ces dernières dans le problème considéré sont des nombres entiers.

On a ainsi à considérer la série

$$\psi(0), \psi(1), \psi(2), \psi(3), \dots$$

Il faut ici tout d'abord tenir compte de cette particularité de cette série que la somme de ses termes est égale à l'unité. En effet, on a

Or le premier terme de ce polynome est égal à l'unité, car

$$\sum_{x=0}^{\infty} \psi_0(x) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

En même temps tous les autres sont nuls. Ainsi pour $\sum_{x=0}^{\infty} \Delta^2 \psi_0(x)$ on obtient:

$$\begin{split} e_{\lambda}\mathcal{A}^{2}\psi_{0}(x) \\ 0 \quad & \psi_{0}(0) - 2\psi_{0}(-1) + \psi_{0}(-2) = 1 \\ 1 \quad & \psi_{0}(1) - 2\psi_{0}(0) + \psi_{0}(-1) = \lambda - 2 \\ 2 \quad & \psi_{0}(2) - 2\psi_{0}(1) + \psi_{0}(0) = \frac{\lambda^{2}}{2!} - 2\lambda + 1 \\ 3 \quad & \psi_{0}(3) - 2\psi_{0}(2) + \psi_{0}(1) = \frac{\lambda^{3}}{3!} - 2\frac{\lambda^{2}}{2!} + \lambda \\ 4 \quad & \psi_{0}(4) - 2\psi_{0}(3) + \psi_{0}(2) = \frac{\lambda^{4}}{4!} - 2\frac{\lambda^{3}}{3!} + \frac{\lambda^{2}}{2!} \end{split}$$

En additionnant, on obtiendra pour la somme $e^{\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \Delta^2 \psi_0(x)$ un polynome dont les membres s'annulent successivement. Il en sera de même avec la somme $\sum_{x=0}^{\infty} \Delta^3 \psi_0(x)$ et toutes les autres.

Passons maintenant à la moyenne arithmétique. Elle est égale au premier moment par rapport à zéro. Par suite, on aura en désignant par la lettre μ les moments par rapport au zéro:

$$m = \mu_1 = \frac{\Sigma x \psi(x)}{\Sigma \psi(x)}.$$

La somme $\Sigma \psi(x)$ étant égale à l'unité, on est dispensé ici et aussi dans le calcul des autres moments de la division par cette somme. On aura donc:

$$m = \mu_1 = \sum x \psi(x) = \sum x \psi_0(x) + \varkappa_2 \sum x \Delta^2 \psi_0(x) + \varkappa_3 \sum x \Delta^3 \psi_0(x) + \dots$$

On calcule facilement la première des sommes qui figurent ici.

$$e^{\lambda} \varSigma \, x \psi_0(x) = \lambda + rac{\lambda^2}{1!} + rac{\lambda^3}{2!} + \ldots = \lambda \left(1 + rac{\lambda}{1!} + rac{\lambda^2}{2!} + \ldots
ight) = \lambda e^{\lambda}$$

et par suite: $\sum x \psi_0(x) = \lambda$.

Toutes les autres sommes sont nulles. Par exemple pour la deuxième somme on a:

$$\begin{split} \varSigma x \varDelta^2 \psi_0(x) &= \varSigma x \psi_0(x) - 2 \varSigma x \psi_0(x-1) + \varSigma x \psi_0(x-2) \\ x &= e^{\lambda} \psi_0(x-1) & x e^{\lambda} \psi_0(x-1) \\ 0 &= 0 \\ 1 &= 1 \\ 2 &= \frac{\lambda}{1!} & 2 \frac{\lambda}{1!} \\ 3 &= \frac{\lambda^2}{2!} & 3 \frac{\lambda^2}{2!} \\ 4 &= \frac{\lambda^3}{3!} & 4 \frac{\lambda^3}{3!} \end{split}$$

$$\begin{split} e^{\lambda} \varSigma x \psi_0(x-1) = & 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots + \frac{\lambda}{1!} + 2\frac{\lambda^2}{2!} + 3\frac{\lambda^3}{3!} + \ldots = \\ & = e^{\lambda} + \lambda \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots\right) = e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda} \\ \varSigma x \psi_0(x-1) = & 1 + \lambda \end{split}$$

$$x e^{\lambda} \psi_0(x-2) x e^{\lambda} \psi_0(x-2)$$
 $0 0 0$
 $1 0 0$
 $2 1 2$
 $3 \frac{\lambda}{1!} 3 \frac{\lambda}{1!}$
 $4 \frac{\lambda^2}{2!} 4 \frac{\lambda^2}{2!}$
 $5 \frac{\lambda^3}{3!} 5 \frac{\lambda^3}{3!}$

$$egin{aligned} e^{\lambda} \varSigma x \psi_0(x-2) &= 2 \Big(1 + rac{\lambda}{1!} + rac{\lambda^2}{2!} + \ldots \Big) + rac{\lambda}{1!} + 2rac{\lambda^2}{2!} + rac{\lambda^3}{3!} + \ldots = \\ &= 2e^{\lambda} + \lambda \Big(1 + rac{\lambda}{1!} + rac{\lambda^2}{2!} + \ldots \Big) = 2e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda} \\ \varSigma x \psi_0(x-2) &= 2 + \lambda \end{aligned}$$

et enfin:

$$\Sigma x \Delta^2 \psi_0(x) = \lambda - 2(1+\lambda) + 2 + \lambda = 0$$

Par un raisonnement semblable on obtient

$$\Sigma x \Delta^3 \psi_0(x) = 0, \ \Sigma x \Delta^4 \psi_0(x) = 0, \dots$$

et, en conséquence, la moyenne arithmetique des valeurs de la fonction $\psi(x)$ se trouve égale à λ .

Passons maintenant au deuxième moment qui est

$$m_2 = \mu_2 - \mu_1^2$$

On a par la définition:

$$\mu_2 = \sum x^2 \psi(x) = \sum x^2 \psi_0(x) + \varkappa_2 \sum x^2 \varDelta^2 \psi_0(x) + \varkappa_3 \sum x^2 \varDelta^3 \psi_0(x) + \dots$$

Calculons les sommes qui figurent ici. Pour la première on obtient:

$$x = e^{\lambda} \psi_0(x) \quad x^2 = x^2 e^{\lambda} \psi_0(x)$$

$$0 = 1 \quad 0 \quad 0$$

$$1 = \frac{\lambda}{1!} \quad 1 = \frac{\lambda}{1!}$$

$$2 = \frac{\lambda^2}{2!} \quad 4 = 4\frac{\lambda^2}{2!}$$

$$3 = \frac{\lambda^3}{3!} \quad 9 = 9\frac{\lambda^3}{3!}$$

$$4 = \frac{\lambda^4}{4!} \quad 16 = 16\frac{\lambda^4}{4!}$$

$$\begin{split} e^{\lambda} \varSigma x^2 \psi_0(x) &= \lambda \bigg(1 + 2 \frac{\lambda}{1!} + 3 \frac{\lambda^2}{2!} + 4 \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots \bigg) = \\ &= \lambda \bigg(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots + \frac{\lambda}{1!} + 2 \frac{\lambda^2}{2!} + 3 \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots \bigg) = \\ &= \lambda \bigg[e^{\lambda} + \lambda \bigg(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots \bigg) \bigg] = \lambda [e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}] = e^{\lambda} (\lambda + \lambda^2) \end{split}$$

 $\Sigma x^2 \psi_0(x) = \lambda + \lambda^2$

Pour la deuxième somme on aura:

$$\begin{split} \varSigma x^2 \varDelta^2 \psi_0(x) = & \varSigma x^2 \psi_0(x) - 2 \varSigma x^2 \psi_0(x-1) + \varSigma x^2 \psi_0(x-2) \\ & x \quad e^{\lambda} \psi_0(x-1) \quad x^2 \quad x^2 e^{\lambda} \psi_0(x-1) \\ & 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ & 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ & 2 \quad \frac{\lambda}{1!} \quad 4 \quad 4 \frac{\lambda}{1!} \\ & 3 \quad \frac{\lambda^2}{2!} \quad 9 \quad 9 \frac{\lambda^2}{2!} \\ & 4 \quad \frac{\lambda^3}{3!} \quad 16 \quad 16 \frac{\lambda^3}{3!} \\ & 5 \quad \frac{\lambda^4}{4!} \quad 25 \quad 25 \frac{\lambda^4}{4!} \end{split}$$

$$\begin{split} e^{\lambda} \, \varSigma \, x^2 \psi_0(x-2) &= 4 + 4 \frac{\lambda}{1!} + 4 \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + 5 \frac{\lambda}{1!} + 12 \frac{\lambda^2}{2!} + 21 \frac{\lambda^3}{3!} + 32 \frac{\lambda^4}{4!} + \ldots = \\ &= 4 e^{\lambda} + \lambda \left(5 + 6 \frac{\lambda}{1!} + 7 \frac{\lambda^2}{2!} + 8 \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots \right) = \\ &= 4 e^{\lambda} + \lambda \left(5 + 5 \frac{\lambda}{1!} + 5 \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + \frac{\lambda}{1!} + 2 \frac{\lambda^2}{2!} + 3 \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots \right) = \\ &= 4 e^{\lambda} + 5 \lambda e^{\lambda} + \lambda^2 \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots \right) = 4 e^{\lambda} + 5 \lambda e^{\lambda} + \lambda^2 e^{\lambda} \\ &\varSigma \, x^2 \psi_0(x-2) = 4 + 5 \lambda + \lambda^2 \end{split}$$

Et enfin
$$\Sigma x^2 \Delta^2 \psi_0(x) = \lambda + \lambda^2 - 2(1 + 3\lambda + \lambda^2) + 4 + 5\lambda + \lambda^2 = 2$$
.

Passons à la troisième somme $\Sigma x^2 \Delta^3 \psi_0(x)$. Par les développements semblables, on arrive facilement à la conclusion qu'elle est nulle. En effet on a

$$\Sigma x^2 \Delta^3 \psi_0(x) = \Sigma x^2 \psi_0(x) - 3\Sigma x^2 \psi_0(x-1) + 3\Sigma x^2 \psi_0(x-2) + \Sigma x^2 \psi_0(x-3)$$

Par la même méthode qu'auparavant on obtient

$$\sum x^2 \psi_0(x-3) = 9 + 7\lambda + \lambda^2$$

et par suite:

$$\varSigma x^2 \varDelta^3 \psi_0(x) = \lambda + \lambda^2 - 3(1+3\lambda+\lambda^2) + 3(4+5\lambda+\lambda^2) - (9+7\lambda+\lambda^2) = 0.$$

Toutes les autres sommes

$$\sum x^2 \Delta^4 \psi_0(x), \sum x^2 \Delta^5 \psi_0(x), \dots$$

sont égalements nulles.

En fin des comptes on obtient pour le deuxième moment de la fonction $\psi(x)$:

$$\begin{array}{l} \mu_2 = \lambda + \lambda^2 + 2\varkappa_2 \\ m_2 \! = \! \mu_2 \! - \! \mu_1^2 \! = \! \lambda \! + \! 2\varkappa_2 \end{array}$$

Passons enfin au calcul du troisième moment de la fonction $\psi(x)$. Nous avons pour cela les équations:

$$\begin{split} \mu_3 = & \Sigma x^3 \psi(x) = \Sigma x^3 \psi_0(x) + \varkappa_2 \Sigma x^3 \varDelta^2 \psi_0(x) + \varkappa_3 \Sigma x^3 \varDelta^3 \psi_0(x) + \dots \\ \text{et} \\ m_3 = & \mu_3 - 3 \mu_1 \mu_2 + 2 \mu_1^3 \end{split}$$

Calculons d'abord la somme $\sum x^3 \psi_0(x)$

$$x \quad e^{\lambda} \psi_0(x) \quad x^3 \quad x^3 e^{\lambda} \psi_0(x)$$

$$0 \quad 1 \quad 0 \quad 0$$

$$1 \quad \frac{\lambda}{1!} \quad 1 \quad \frac{\lambda}{1!}$$

$$2 \quad \frac{\lambda^2}{2!} \quad 8 \quad 8 \frac{\lambda^2}{2!}$$

$$3 \quad \frac{\lambda^3}{3!} \quad 27 \quad 27 \frac{\lambda^3}{3!}$$

$$4 \quad \frac{\lambda^4}{4!} \quad 64 \quad 64 \frac{\lambda^4}{4!}$$

$$5 \quad \frac{\lambda^5}{5!} \quad 125 \quad 125 \frac{\lambda^5}{5!}$$

$$\begin{split} e^{\lambda} \varSigma x^3 \psi_0(x) &= \lambda \Big(1 + 4 \frac{\lambda}{1!} + 9 \frac{\lambda^2}{2!} + 16 \frac{\lambda^3}{3!} + 25 \frac{\lambda^4}{4!} + \dots \Big) = \\ &= \lambda \Big(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots + 3 \frac{\lambda}{1!} + 8 \frac{\lambda^2}{2!} + 15 \frac{\lambda^3}{3!} + 24 \frac{\lambda^4}{4!} + \dots \Big) = \\ &= \lambda e^{\lambda} + \lambda^2 \Big(3 + 4 \frac{\lambda}{1!} + 5 \frac{\lambda^2}{2!} + 6 \frac{\lambda^3}{3!} + \dots \Big) = \\ &= \lambda e^{\lambda} + \lambda^2 \Big(3 + 3 \frac{\lambda}{1!} + 3 \frac{\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda}{1!} + 2 \frac{\lambda^2}{2!} + 3 \frac{\lambda^3}{3!} + \dots \Big) = \\ &= \lambda e^{\lambda} + 3\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda^3 \Big(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots \Big) = \lambda e^{\lambda} + 3\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda^3 e^{\lambda} \\ \varSigma x^3 \psi_0(x) &= \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3 \end{split}$$

Pour les deux suivantes sommes de la fonction μ_3 nous avons les équations:

$$\begin{split} & \varSigma x^3 \varDelta^2 \psi_0(x) = \varSigma x^3 \psi_0(x) - 2 \varSigma x^3 \psi_0(x-1) + \varSigma x^3 \psi_0(x-2) \\ & \varSigma x^3 \varDelta^3 \psi_0(x) = \varSigma x^3 \psi_0(x) - 3 \varSigma x^3 \psi_0(x-1) + 3 \varSigma x^3 \psi_0(x-2) - \varSigma x^3 \psi_0(x-3). \end{split}$$

Nous avons ainsi à calculer encore trois sommes. On les obtient toujours par la même méthode. Pour abréger, j'omettrai les détails et donnerai les résultats seulement:

$$\Sigma x^3 \psi_0(x-1) = 1 + 7\lambda + 6\lambda^2 + \lambda^3$$

 $\Sigma x^3 \psi_0(x-2) = 8 + 19\lambda + 9\lambda^2 + \lambda^3$
 $\Sigma x^3 \psi_0(x-3) = 27 + 37\lambda + 12\lambda^2 + \lambda^3$

On peut démontrer en outre que les sommes

$$\Sigma x^3 \Delta^4 \psi_0(x)$$
, $\Sigma x^3 \Delta^5 \psi_0(x)$, ... sont nulles.

Par conséquent, le troisième moment par rapport au zéro a la forme:

$$\begin{array}{l} \mu_3 = \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3 + \varkappa_2[\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3 - 2(1 + 7\lambda + 6\lambda^2 + \lambda^3) + \\ + 8 + 19\lambda + 9\lambda^2 + \lambda^3] + \varkappa_3[\lambda + 3\lambda + \lambda^3 - 3(1 + 7\lambda + 6\lambda^2 + \lambda^3) + \\ + 3(8 + 19\lambda + 9\lambda^2 + \lambda^3) - (27 + 37\lambda + 12\lambda^2 + \lambda^3)] = \\ = \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3 + \varkappa_2(6 + 6\lambda) - 6\varkappa_3 \end{array}$$

On obtient enfin le même moment par rapport à la moyenne:

$$\begin{array}{l} m_3=\lambda+3\lambda^2+\lambda^3+\varkappa_2(6+6\lambda)-6\varkappa_3-3\lambda(\lambda+\lambda^2+2\varkappa_2)+2\lambda^3=\\ =\lambda+6\varkappa_2-6\varkappa_3. \end{array}$$

On a, en somme, les caractéristiques suivantes pour la fonction $\psi(x) = \psi_0(x) + \varkappa_2 \Delta^2 \psi_0(x) + \varkappa_3 \Delta^3 \psi_0(x) + \dots$

$$\begin{split} m &= \lambda \\ m_2 &= \lambda + 2\varkappa_2 \\ m_3 &= \lambda + 6\varkappa_2 - 6\varkappa_3 \end{split}$$

On en déduit les formules pour le calcul des coefficients:

$$\begin{split} \lambda &= m \\ \varkappa_2 &= \frac{m_2 - m}{2} \\ \varkappa_3 &= \frac{3m_2 - m_3 - 2m}{6} \end{split}$$

Appliquons les résultats de ces considérations aux matériaux biométriques. Je prendrai d'abord les nombres de pétales dans les fleurs terminales de *Ranunculus repens* d'après les plantes des environs de Lwów. Les 413 exemplaires examinés ont donné les fréquences des différents nombres de pétales:

Pour appliquer ici la fonction $\psi(x)$, il faut considérer non les nombres de pétales, mais leurs déviations du nombre normal qui est 5. En outre, il faut calculer les fréquences relatives, pour que leur somme soit égale à l'unité. On aura ainsi:

Les caractéristiques dans le cas considéré sont les suivantes: $m=0.3971,\ m_2=0.6898,\ m_3=1.3721.$ On en déduit $e^{-\lambda}=0.6723,\ \varkappa_2=+0.1463,\ \varkappa_3=-0.0161.$ Dans la table I sont donnés les détails des calculs.

x	ψ_0	$\Delta\psi_0$	$\Delta^2 \psi_0$	$\Delta^3 \psi_0$	$\varkappa_2 \Delta^2 \psi_0$	$\varkappa_3 \Delta^3 \psi_0$	ψ
0	6723	+ 6723	+ 6723	+ 6723	+ 984	_ 108	7599
1	2670	- 4053	- 10776	- 17499	- 1577	+ 282	1375
2	530	_ 2140	+ 1913	+ 12689	+ 280	- 204	606
2 3	70	- 460	+ 1680	- 233	+ 246	+ 4	320
4	7	- 63	+ 397	- 1283	+ 58	+ 21	86
ō	0	- 7	+ 56	- 341	+ 8	+ 5	13
Σ	10000				- 1577 + 1576	- 312 + 312	9999

TABLE I Ranunculus repens

La table II présente la comparaison des fréquences calculées et observées. Leur concordance est parfaite.

TABLE II Ranunculus repens

Nombres	Leurs fréquences		
de pétales	calculées	observées	
5	313.8	314	
6	56.8	56	
7	25.0	26	
8	13.2	13	
9	3.6	3	
10	0.5	1	
Sommes	412.9	413	

Dans certains cas, il faut prendre de la fonction $\psi(x)$ les deux premiers termes seulement, le troisième produisant une discordance entre les fréquences calculées et observées.

Tel est le cas du nombre de petales chez Anemone Hepatica. J'ai observé cette plante aux environs de Lwów et j'ai trouvé les fréquences suivantes, en prenant une seule fleur de chacun de 439 exemplaires

Les caractéristiques étaient: $m=0.8633,~m_2=1.0611,~\mathrm{d'où},~e^{-\lambda}=0.4218,~\varkappa_2=+~0.0989.$

La concordance des fréquences calculées et observées s'est trouvée également parfaite (table II)

Nombres	Leurs fréquences		
de pétales	calculées	observées	
6	203.5	204	
7	139.1	139	
8	62.5	61	
9	24.0	24	
10	7.6	9	
11	1.9	2	
Sommes	138.5	439	

TABLE III
Anemone Hepatica

J'ai examiné, dans les environs de Lwów, encore trois espèces de Ranunculus: R. Flammula, R. polyanthemos et R. acer. Je prenais toujours des fleurs terminales. Ceci est très important, car comme j'ai démontré dans la première de ces "Observations" les fleurs latérales présentent des différences notables. En outre, j'ai pris soin de ne prendre qu'une seule fleur de chaque individu, ce qui est surtout important dans le cas de R. repens exposé plus haut, car cette plante se propage au moyen des stolons.

Pour R. Flammula j'ai obtenu les caractéristiques:

$$\begin{array}{lll} m=0.3172, & m_2=0.4097, & m_3=0.5574, \\ e^{-\lambda}=0.7282, & \varkappa_2=+\ 0.0462, & \varkappa_3=+\ 0.0062. \end{array}$$

La table IV expose les résultats qui sont suffisamment concordants.

TABLE IV
Ranunculus Flammula

Nombre	Leurs fréquences	
des petales	calculées	observées
5	111.4	111
6	23.5	24
7	8.7	8
8	1.4	2
Sommes	145.0	145

Très intéressant s'est montré R. polyanthemos. J'ai trouvé pour lui: $m=0.05140,\ m_2=0.08148,\ m_3=0.19293,\ e^{-\lambda}=0.9499,\ \varkappa_2=+0.01504,\ \varkappa_3=-0.00855.$ Ces valeurs ont donné un résultat abérrant (tab. V), contenant une fréquence négative!

TAB	SLE V
Ranunculus	polyan the mos

Nombres	Leurs fréquences		
de pétales	calculées	observées	
5	409.2	410	
6	19.2	16	
7	— 4·3	1	
8	3.3	0	
9	0.2	1	
Sommes	427.6	428	

Ce résultat étrange est causé par la rencontre de l'individu exceptionnel à 9 pétales. En effet, quand on l'omet, on arrive à une parfaite concordance des fréquences calculées et observées. On a alors: $m=0.04215,\ m_2=0.04502,\ m_3=0.05044,\ e^{-\lambda}=0.9585,\ \varkappa_2=+0.00143,\ \varkappa_3=+0.00005$ (table VI).

TABLE VI Ranunculus polyanthemos

Nombres	Leurs fréquences		
de pétales	calculées	observes	
5	409.9	410	
6	16.1	16	
7	. 1.0	1	
Sommes	427.0	427	

Nous arrivons enfin à la dernière espèce R. acer. Ici on obtient une concordance qui laisse beaucoup à désirer (table VII). Les caractéristiques sont les suivantes: m=0.1525, $e^{-\lambda}=0.8586$, $m_2=0.2373$, $m_3=0.4921$, $\varkappa_2=+0.0424$, $\varkappa_3=-0.0142$.

TABLE VII Ranunculus acer

Nombres	Leurs fréquences		
de pétales	calculées	observées	
5	457:3	458	
6	51.8	48	
7	2.4	7	
8	6.3	3	
9	2.8	2	
Sommes	520.6	518	

La cause de ce désaccord réside visiblement dans la fréquence des cas extrêmes qui s'est trouvée excessive par le jeu de hasard. En effet, prenons la fréquence de 9 pétales égale à 1 au lieu de 2. Nous aurons alors: m=0.1451, $m_2=0.2092$, $m_3=0.3876$, $e^{-\lambda}=0.8649$, $\varkappa_2=+0.0320$, $\varkappa_3=-0.0084$.

Avec ces valeurs on obtient une assez bonne concordance des fréquences calculées et observées (table VIII).

TABLE V	III
Ranunculus	acer

Nombres	Leurs fréquences		
de pétales	calculées	observées	
5	457:7	458	
6	49.1	48	
7	5.3	7	
8	4.1	3	
9	0.6	1	
Sommes	516.8	517	

Les fonctions B de Charlier trouvent encore une application importante, à savoir pour l'interpolation des séries statistiques bilatérales, lorsque la fréquence de la valeur la plus fréquente surpasse de beaucoup celles des toutes les autres valeurs. De telles séries sont surtout fréquentes chez les plantes. On les trouve souvent, en examinant les fleurs ligulées et les involucres des capitules des Composées.

Par exemple, les cultures du Jardin Botanique de Dublany ont donné pour les nombres de fleurs ligulées dans les capitules terminaux de Senecio sarracenicus la série suivante:

On peut admettre que cette forme de la variabilité est produite par trois causes. La première agit constamment et plus fortement que les autres, produisant l'effet qui est le plus fréquent. Les deux autres causes n'agissent que rarement, en reduissant ou augmentant l'effet de la première. Par consequent, on peut décomposer la série en deux, de manière à caractériser séparément l'action de l'une et de l'autre de ces deux dernières causes. Les nouvelles séries qu'on obtient ainsi seront unilatérales et on peut appliquer à elles la fonction B de Charlier.

Appliquons ces raisonnements à Senecio sarracenicus. Etablissons d'abord la série en question pour la cause qui diminue le nombre de ligules. Elle n'agit pas dans tous les cas, dans lesquels ce nombre est de 8 et davantage, c'est-à-dire dans 118 cas. Dans 43 cas, elle agit faiblement, en diminuant le nombre de ligules de 1. Dans 14 cas son action est 2 fois plus forte, en abaissant le nombre de ligules à 6. Enfin dans un cas cette action est 3 fois plus forte, en ne permettant que la production de 5 ligules seulement.

On obtient ainsi la série

Actions de la cause 0 1 2 3 Leurs fréquences 118 43 14 1

D'une manière semblable on obtient pour la cause qui favorise la production des ligules

> Actions de la cause 0 1 2 Leurs fréquences 171 4 1

Pour la cause abaissant la production des ligules nous avons les caractéristiques: $m=0.4205,\ e^{-\lambda}=0.6567,\ m_2=0.4368,\ m_3=0.4087,\ \varkappa_2=+0.0081,\ \varkappa_3=+0.0101.$ La concordance des fréquences calculées et observées se trouve suffisante (table IX).

TABLE IX
Senecio sarracenicus
Cause abaissant la production des ligules

Actions	Leurs fréquences		
de la cause	calculées	observées	
0	117:5	118	
1	44.1	43	
2	12.6	14	
3	1.7	1	
Sommes	176.0	176	

Pour l'action de la cause favorisant la production des ligules on a les caractéristiques: $m=0.03409,\ e^{-\lambda}=0.9665,\ m_2=0.04429,\ m_3=0.06361,\ \varkappa_2=+0.00510,\ \varkappa_3=+0.00018.$ La concordance est parfaite (table X).

TABLE X

Serecio sarracenicus

Cause favoritant la production des ligules

Actions	Leurs fréquences		
de la cause	calculées	observées	
0	171.0	171	
1	4.0	4	
2	1.0	1	
Sommes	176.0	176	

Je vais encore appliquer la méthode exposée plus haut aux nombres de folioles internes de l'involucre dans les capitules d'Aposeris foetida examinés aux environs de Lwów. Les folioles en question sont disposées en verticilles. Les observations ont été portées sur un seul capitule de chacun de 300 individus. Elles ont donné:

Nombres de folioles:	- 6	7	8	9	10	11
Leurs fréquentes:	1	10	234	42	10	3

Pour la cause abaissant la production des folioles nous avons ici la série

> Actions de la cause: 0 1 2 Leurs fréquentes: 289 10 1

Les caractéristiques sont les suivantes: m=0.0400, $e^{-\lambda}=0.9608$, $m_2=0.0541$, $m_3=0.0547$, $\varkappa_2=+0.0025$, $\varkappa_3=+0.0001$. La concordance est parfaite (table XI).

TABLE XI

Aposeris foetida

Cause abaissant la production des folioles

Actions	Leurs fr	équences	
de la cause	calculées	observées	
0	289.0	289	
1	10.0	10	
2	1.0	1	
Sommes	300.0	300	

Pour la casue favorisant la production des folioles, on a la série

Actions de la cause: 0 1 2 3 Leurs fréquences: 245 42 10 3 Pour cette série on obtient: m=0.2367, $e^{-\lambda}=0.7892$, $m_2=0.3073$, $\varkappa_2=+0.0353$, Deux termes de la fonction $\psi(x)$ donnent ici meilleure concordance des fréquences que ne le font trois. Cette concordance est suffisante (table XII).

 $\begin{array}{c} {\rm TABLE~XII} \\ {\it Aposeris~foctida} \\ {\rm Cause~favorisant~la~production~des~folioles} \end{array}$

Actions	Leurs fréquences		
de la cause	calculées	observées	
0	245.1	245	
1	41.3	42	
2	11.3	10	
3	1.8	3	
Sommes	299.5	300	

Je donnerai enfin un example zoologique: les nombres de rayons de la méduse *Pseudoclytia pentata*, examinée par A. G. Mayer.

Nombres de rayons: 2 3 4 5 6 7 8 Leurs fréquences: 1 8 56 860 64 6 1

Pour l'action de la cause abaissant la production des rayons on a ici la série:

> Actions: 0 1 2 3 Fréquences: 931 56 8 1

On prends deux termes de la fonction $\psi(x)$. Les caractéristiques: $m=0.0753,\ e^{-\lambda}=0.9275,\ m_2=0.0917,\ \varkappa_2=0.0082$. La concordance des fréquences est suffisante (table XIII).

TABLE XIII

Pseudoclytia pentata

Cause abaissant la production des rayons

Actions	Leurs fréquences			
de la cause	calculées	observées		
0	931.4	931		
1 .	55.0	56		
2 .	9.1	8		
3	0.6	1		
Sommes	996-1	996		

Pour la cause favorisant la production des rayons on a la série:

 Actions de la cause:
 0
 1
 2
 3

 Leurs fréquences:
 925
 64
 6
 1

Les caractéristiques: $m=0.0793,\ e^{-\lambda}=0.9238,\ m_2=0.0911,\ m_3=0.1170,\ \varkappa_2=+0.0059,\ \varkappa_3=-0.0004.$ La concordance est bonne (table XIV).

TABLE XIV

Pseudoclytia pentata. Cause favorisant la production des rayons

Actions	Leurs fr	équences	
de la cause	calculées	observées	
0	925:3	925	
1	63.7	64	
2	6.2	6	
3	0.1	1	
Sommes	995.3	996	

VII. Parastiques chez les Dipsacacées

Comme on le sait, les nombres de parastiques sont ceux de la série de Fibonacci:

En particulier, dans les calatides d'*Helianthus annus*, on observe les termes élevés de cette série: 34, 55, 89.

Or chez les Dipsacacées j'ai constaté un fait abérrant: les nombres de parastiques dans les inflorescences de Knautia arvensis et Succisa pratensis sont doubles. A savoir, j'ai trouvé 10 et 16 au lieu de 5 et 8. Le premier de ces nombres se rapporte aux parastiques faiblement ascendants, le second — aux parastiques fortement ascendants.

Laboratoire de botanique de l'Ecole Polytechnique de Lwów.