Wiadomości Botaniczne **35**(3/4): 3–15, 1991

ZBIORY ROZMYTE W EKOLOGII ROŚLIN

Fuzzy set theory application in plant ecology

Zbigniew R. BORYSŁAWSKI

Summary: Fuzzy set theory was developed as an extension of classical set theory. A fuzzy set is a class of objects with continuum of grades of membership, ranging from zero for non-membership to one for full membership. This paper presents basic concepts of fuzzy sets in an ecological context. Examples show how the fuzzy set theory can be applied to plant ecology as a useful complement to currently used methods.

Key words: Fuzzy set, community, ordination, classification, system analysis

Dr Zbigniew R. Borysławski, Uniwersytet Wrocławski, Instytut Botaniki, ul. Kanonia 6/8, 50–328 Wrocław

WSTĘP

Zbiór jest często wykorzystywanym pojęciem w ekologii, jakkolwiek rzadko stosuje się formalne definicje i zapis matematyczny. Terminy takie jak, np. populacja, siedlisko, zbiorowisko, oznaczają klasę, zespół roślin, zwierząt, bądź innych obiektów charakteryzujący się pewnymi, wspólnymi cechami. Jeśli sprecyzujemy sposób powiązania obiektów w klasę i wyznaczymy ściśle jej granice, to możemy dokładnie wskazać elementy, które do takiego zbioru należą. Nie zawsze jednak jest możliwe, a nawet pożądane, definiowanie zbioru tak, że przynależność obiektu do niego podana jest w sposób jednoznaczny.

Na przykład zmiany przestrzennego i gatunkowego zróżnicowania biocenozy odbywają się najczęściej nie w sposób nagły, skokowy, lecz przez szereg ciągłych etapów. Także w analizie sukcesji, napotykamy na kłopoty z mierzalnością zmiennych oraz na trudności w precyzyjnym przewidywaniu kolejnych stanów układu. Modelowanie skomplikowanych systemów ekologicznych ograniczone jest dodatkowo przez formalne wymogi metod matematycznych, które w wielu przypadkach zawodzą. Stawiane jest więc pytanie, czy matematyka może być językiem ekologii, czy też przyroda posługuje się swoistym, własnym językiem, którego analiza powinna być oparta o swoiste reguły lingwistyczne i gramatyczne tego języka [2, 7, 28].

Kontrowersja, prezentowana na łamach *Wiadomości Ekologicznych* – redukcjonizm a holizm w ekologii [16], ma niektóre swoje źródła w wysokim stopniu złożoności obiektów i zjawisk ekologicznych. Określenia nieprecyzyjne np. „liczne oddziaływania", „bardziej równe", są bardzo źle widziane w nauce gdyż nie pasują do ogólnie stosowanego rozumowania, zgodnego z logiką dwuwartościową, tj. „prawda", „fałsz". Redukcjoniści uważają, że pytania na które nie ma jednoznacznej odpowiedzi w postaci „tak" lub „nie", powinny zostać odrzucone z pożytkiem dla wiedzy ekologicznej.

Holiści, stawiani przed zarzutem stosowania nieprecyzyjnych terminów mnożenia bytów ponad potrzebę, szukają rozwiązania w metodach matematycznych, włączając w ramy istniejących teorii, np. informacyjnych, systemowych, itp, opisy zjawisk, które ich zdaniem nie poddają się prostym zabiegom redukcjonistycznym.

W dyskusji należy jednak pamiętać o intuicyjnie akceptowanej, lecz rzadko uświadamianej zależności między złożonością problemu, a możliwością jego opisu. W postaci tak zwanego *prawa niekompatybilności* formułuje je Zadeh [31]: *Precyzja opisu zjawiska, ma się odwrotnie proporcjonalnie do jego złożoności.* Im bardziej skomplikowany jest analizowany układ, tym mniej dokładny może być jego opis.

Nasuwa się więc pytanie, czy nieprecyzyjność, nieokreśloność danego zjawiska wynika z braku dokładnej o nim wiedzy, czy też jest immanentną jego cechą? Przyjrzyjmy się konsekwencjom możliwych odpowiedzi. Jeśli na pierwszą część pytania odpowiadamy twierdząco, pozostają nam drobiazgowe badania wszystkich czynników i zależności, licząc na słuszność powiedzenia J. Weyssemhoffa: „W ogóle nie ma prawie nic, wszystko jest w szczególe". Gdy przyjmiemy alternatywę za słuszną odpowiedź, musimy szukać takich formalnych metod, które pozwolą na analizę zjawisk nie przez redukcję do prostych zależności, lecz w sposób ujmujący ich całą skomplikowaną naturę. Sformułowana w latach sześćdziesiątych koncepcja matematyczna, tzw. *teoria zbiorów rozmytych*, zajmuje się opisem i analizą zjawisk o wysokim stopniu skomplikowania i dużej złożoności.

W pracy podano elementarne pojęcia z zakresu *teorii zbiorów rozmytych*; wskazano również na możliwości oraz już istniejące przykłady wykorzystania jej w ekologii.

WPROWADZENIE DO TEORII ZBIORÓW ROZMYTYCH

Teoria zbiorów rozmytych jest rozszerzeniem klasycznej teorii zbiorów, opracowanej przez niemieckiego matematyka Georga Cantora [1, 14]. Zasadnicze pojęcia klasycznej teorii zbiorów, stanowią *zbiór* oraz *relacja przynależności* do zbioru. Przez zbiór rozumie się zespół dowolnych obiektów, takich jak, np. zwierzęta, drzewa, bodźce fizjologiczne, litery alfabetu. Zbiór wyodrębnia więc klasę obiektów, charakteryzujących się pewną wspólną własnością. Symbolicznie, zbiory oznacza się dużymi literami, np. A, B, C. Obiekty należące do danego zbioru można wymienić ujmując je w nawiasy klamrowe:

$$A=\{\text{ buk, dąb, brzoza, sosna }\}.$$

Relacja przynależności określa czy dany obiekt należy do zbioru, czy też nie. Przynależność obiektu a do zbioru A, zapisujemy:

$$a \in A\ .$$

Brak przynależności obiektu a do zbioru A zapisujemy:

$$a \notin A\ .$$

Obiekty należące do zbioru nazywane są elementami tego zbioru. Klasyczna definicja zbioru wymaga jednoznacznego określenia, czy dany element należy do zbioru. Nie ma możliwości wyrażenia faktu, że niektóre obiekty tylko w pewnym stopniu należą do danego zbioru.

Wiele obiektów nie posiada dokładnie określonych kryteriów, według których można je przyporządkować do konkretnej klasy. Jakie elementy składają się na zbiór „osobniki dojrzałe"? Ile metrów wysokości musi mierzyć drzewo, aby zaliczyć je do wysokich drzew? W jakim stopniu musi być zanieczyszczona woda, aby rzekę zaliczyć do rzek zanieczyszczonych? Jak powinien wyglądać las, aby mógł być zaliczony do lasów iglastych? We wszystkich wymienionych przykładach możemy co prawda wyznaczyć pewne graniczne wartości, po przekroczeniu których uznamy osobnika za dojrzałego, drzewo za wysokie, rzekę za brudną, a las za iglasty, jednakże nie zawsze jest to wygodne i pożądane rozwiązanie. Teoria zbiorów rozmytych sformułowana przez Zadeha [30], jako podstawę bierze właśnie te obserwacje przyrodnicze, które wskazują, że wiele obiektów nie daje się jednoznacznie zaliczyć do konkretnego zbioru. Przeciwnie, niektóre obiekty może charakteryzować częściowa przynależność do kilku zbiorów naraz.

Pojęcie rozmytości oznacza, że dla pewnych obiektów przynależność ich do określonej, wspólnej klasy może być określona nieostro. Teoria zbiorów rozmytych zajmuje się badaniem takich zbiorów, dla których na pytanie czy dany obiekt należy do zbioru, możemy odpowiedzieć nie tylko w kategoriach logiki dwuwartościowej, tj. „prawda" – „fałsz" lub „należy" – „nie należy", lecz podać częściowy stopień przynależności, np. „trochę należy"! Przy czym, potoczne wyrażenie „trochę należy", możemy przekształcić w konkretną wartość liczbową.

Przyjmijmy, że dowolny zbiór rozmyty jest podzbiorem pewnego stałego zbioru, który jest nazwany obszarem rozważań lub przestrzenią. Jest to konieczne, gdyż pojęcia nieostre są z zasady względne. To, czy dowolne drzewo uznamy za „bardzo wysokie", zależy najczęściej od wysokości wszystkich drzew w lesie. Przez zbiór rozmyty będziemy rozumieli taki zbiór elementów w przestrzeni, których „stopień" przynależności do zbioru waha się między całkowitą przynależnością, a całkowitą nieprzynależnością.

W sposób bardziej formalny możemy to wyrazić następująco: przyjmijmy dowolny zbiór elementów zwany przestrzenią $X=\{x\}$. Zbiór rozmyty A w tej przestrzeni, określany jest przez tak zwaną funkcję przynależności μ_A, która każdemu elementowi x przyporządkowuje $\mu_A(x)$ – stopień przynależności elementu x do zbioru A. Funkcja ta przybiera wartości w przedziale $[0,1]$. Cyfra „zero" oznacza całkowitą nieprzynależność, a cyfra „jeden" całkowitą przynależność elementu x przestrzeni X do zbioru rozmytego A. Im wyższa jest wartość funkcji przynależności elementu x do zbioru A, tym w większym stopniu ten element należy do tego zbioru.

Zamiast pełnej definicji zbioru rozmytego, tj. „zbiór rozmyty A jest określony w przestrzeni X przez funkcję przynależności $\mu_A(x)$" będziemy używali krótszej notacji, oznaczając zbiór rozmyty przez:

$$\underset{\sim}{A} \text{ lub } \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$$

Jeśli przestrzeń X jest zbiorem skończonym, a więc takim, którego wszystkie elementy możemy wymienić, to zbiór rozmyty $\underset{\sim}{A}$ w tej przestrzeni, możemy zapisać wymieniając pary, tj. element x i odpowiadającą mu wartość funkcji przynależności $\mu(x)$:

$$\underset{\sim}{A} = x_1/\mu(x_1) + x_2/\mu(x_2) + ,\dots, + x_n/\mu(x_n) \quad (1)$$

Znak + w powyższej notacji nie oznacza sumy arytmetycznej, lecz tak zwaną sumę mnogościową, a zapis $x_n/\mu(x_n)$ mówi nam, że element x_n należy do zbioru rozmytego $\underset{\sim}{A}$ ze stopniem przynależności równym wartości funkcji $\underset{\sim}{\mu}(x_n)$ lub w innej postaci:

$$\underset{\sim}{A} = \{(x_1, \mu(x_1)), (x_2, \mu(x_2)) ,\dots, (x_n, \mu(x_n))\} \quad (2)$$

Widzimy, że kluczowe znaczenie w definiowaniu zbiorów rozmytych ma sposób obliczania „siły" z jaką dany element może należeć do zbioru rozmytego. Postać funkcji, która umożliwia obliczenie stopnia przynależności może być dowolna i jest z reguły dana *a priori*. W zastosowaniach bardzo często używa się standardowej funkcji przynależności $S(x, \alpha, \beta, \gamma)$ [34]:

$$S(x, \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \le \alpha, \\ 2\left(\dfrac{x-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2 & \text{dla } \alpha < x \le \beta, \\ 1 - 2\left(\dfrac{x-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2 & \text{dla } \beta < x \le \gamma \\ 1 & \text{dla } \alpha > \gamma \end{cases} \quad (3)$$

Funkcja (3) przyjmuje wartość 1/2 dla $\beta=(\alpha + \gamma)/2$, punkt ten nazywany jest punktem przejścia. Wartości stałych α, β i γ mogą być dobierane dowolnie.

Jako pomoc w zrozumieniu podstawowych pojęć teorii zbiorów rozmytych, posłuży nam charakterystyka ośmiu drzew z tabeli 1. Przestrzeń X stanowią drzewa, $X=\{d_1, d_2, \dots, d_8\}$. Zdefiniujmy w tej przestrzeni zbiór rozmyty „wysokie drzewa" $\underset{\sim}{B}$ wykorzystując funkcję przynależności (3) $S(x, 3, 19, 35)$. Wartości stałych dobrano tak, że drzewo o wysokości 3 m w

TABELA 1. Wiek i wysokość drzew.
TABLE 1. Age and hight of trees.

drzewo	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8
wiek (lata)	20	25	40	50	60	70	90	100
wysokość (m)	2	12	10	15	16	22	23	36

ogóle nie należy do zbioru wysokich drzew, a drzewo o wysokości większej niż 35 m całkowicie należy do tego zbioru. Zbiór rozmyty „wysokie drzewa" $\underset{\sim}{B}$ zapisujemy stosując notację (1):

$$\underset{\sim}{B} = d_1/0.00 + d_2/0.15 + d_3/0.09 + d_4/0.2\ 8 + \\ + d_5/0.33 + d_6/0.66 + d_7/0.71 + d_8/1.00$$

Zdefiniujmy jeszcze jeden zbiór rozmyty w tej przestrzeni – „stare drzewa" $\underset{\sim}{A}$. Stopień z jakim każde drzewo należy do zbioru $\underset{\sim}{A}$ określamy za pomocą nieco innej funkcji przynależności o postaci:

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \le 18 \\ 1 - \left[\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-18}{20}\right)}\right]^2 & \text{gdy } 18 \le x \ge 95 \\ 1 & \text{gdy } x > 95 \end{cases} \qquad (4)$$

Stosując notację (2), możemy teraz zapisać zbiór „stare drzewa" $\underset{\sim}{A}$ następująco:

$$\underset{\sim}{A} = \{(d_1, 0.01), (d_2, 0.11), (d_3, 0.55), (d_4, 0.72), \\ (d_5, 0.82), (d_6, 0.87), (d_7, 0.93), (d_8, 1.00)\}$$

Dobierając odpowiednio stałe we wzorze (4) przyjęliśmy, że dwudziestoletnie drzewo (d_1) należy do zbioru starych drzew tylko w bardzo małym stopniu, podczas gdy drzewo stuletnie (d_8), całkowicie należy do tego zbioru.

Postać funkcji przynależności (wzory 3, 4), które posłużyły do obliczenia stopnia przynależności elementów do zdefiniowanych zbiorów rozmytych, dobrane zostały tak, aby naszym zdaniem najlepiej odzwierciedlały stopień z jakim każde drzewo należy do zbioru „stare" i do zbioru „wysokie".

Zadeh [30] podkreśla, że w przypadku zbiorów rozmytych, nie ma większego sensu mówienie, iż dany obiekt x należy lub nie należy do zbioru rozmytego $\underset{\sim}{A}$, poza banalnym faktem gdy $\mu_{\underset{\sim}{E}}(x) > 0$. Rozumowanie należy raczej prowadzić w ten sposób, że dla pewnych wartości, powiedzmy α i β, przyjmujemy, że obiekt należy do zbioru $\underset{\sim}{A}$ gdy: $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \ge \alpha$ oraz, że x nie należy do $\underset{\sim}{A}$ gdy: $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \le \beta$, podczas gdy dla $\beta < \mu_{\underset{\sim}{E}}(x) < \alpha$ zakładamy, iż przynależność elementu x jest częściowa. Jak widzimy, rozważanie takie prowadzi do logiki trójwartościowej „prawda", „fałsz", „częściowo prawda" lub „częściowo fałsz".

Wszystkie zależności i operacje znane z klasycznej teorii zbiorów mają swoje odpowiedniki w teorii zbiorów rozmytych. Definiuje się je na funkcjach przynależności. Mówimy, że dwa zbiory rozmyte $\underset{\sim}{A}$ i $\underset{\sim}{B}$ są sobie równe, $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B}$ gdy:

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \qquad \forall\, x \in X \qquad (5)$$

znak $\forall$ czytamy „dla każdego", a więc dla każdego x należącego do X.

Zbiór rozmyty $\underset{\sim}{A}$, będziemy nazywali podzbiorem zbioru rozmytego $\underset{\sim}{B}$ i oznaczali $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B}$, jeśli:

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \le \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \qquad \forall\, x \in X \qquad (6)$$

W wyniku pewnych operacji, dwa zbiory rozmyte, mogą dawać trzeci zbiór rozmyty.

Sumą dwóch zbiorów rozmytych $\underset{\sim}{A}$ i $\underset{\sim}{B}$, nazywamy zbiór $\underset{\sim}{C}$ i oznaczamy $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$, gdy jego funkcja przynależności dana jest wzorem:

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x) = MAX\,[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)] \qquad \forall\, x \in X \qquad (7)$$

Operacja *MAX* polega na wybraniu większej z pary liczb, a logicznie odpowiada alternatywie „lub". W naszym przykładzie, zbiór $\underset{\sim}{C}$ oznacza więc „drzewa wysokie lub stare" :

$$\underset{\sim}{C} = d_1/.01 + d_2/.15 + d_3/.55 + d_4/.72 + \\ + d_5/.82 + d_6/.87 + d_7/.93 + d_8/1.00$$

Iloczynem lub przecięciem dwóch zbiorów rozmytych $\underset{\sim}{A}$ i $\underset{\sim}{B}$ będziemy nazywali zbiór rozmyty $\underset{\sim}{D}$ i oznaczali $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$, gdy jego funkcja przynależności dana jest wzorem:

$$\mu_{\underset{\sim}{D}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}(x) = MIN\,[\,\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)] \qquad \forall\, x \in X \quad (8)$$

Operacja *MIN* polega na wybraniu mniejszej z pary liczb, a logicznie odpowiada koniunkcji „*i*". Iloczyn zbiorów rozmytych $\underset{\sim}{A}$ i $\underset{\sim}{B}$ oznacza więc „drzewa stare i wysokie":

$$\underset{\sim}{D} = d_1/.0 + d_2/.11 + d_3/.09 + d_4/.28 + \\ + d_5/.33 + d_6.66 + d_7/.71 + d_8/1.0$$

Dopełnieniem do zbioru rozmytego $\underset{\sim}{A}$ jest zbiór $\overline{\underset{\sim}{A}}$, którego funkcja przynależności dana jest następująco:

$$\mu_{\overline{\underset{\sim}{A}}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \qquad \forall\, x \in X \quad (9)$$

Jest to różnica, oznaczająca logicznie negację, zaprzeczenie „nie". W naszym przykładzie, dopełnienie do zbioru $\underset{\sim}{A}$ „stare drzewa" oznacza więc „nie stare drzewa":

$$\overline{\underset{\sim}{A}} = d_1/.99 + d_2/.89 + d_3/.45 + d_4/.28 + \\ d_5/.18 + d_6/.13 + d_7/.07 + d_8/.00$$

Roberts [23] wprowadza nową operację na zbiorach rozmytych, nazywaną nieprzemienną różnicą zbiorów rozmytych $\underset{\sim}{A}$ i $\underset{\sim}{B}$, oznaczaną jako $\underset{\sim}{A} \lceil \underset{\sim}{B}$. Zbiór rozmyty $\underset{\sim}{E}$ powstały w wyniku tej operacji określony jest funkcją przynależności:

$$\mu_{\underset{\sim}{E}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A} \lceil \underset{\sim}{B}}(x) = (\,1 + [\,\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)]^2 - [\,\mu_{\overline{\underset{\sim}{A}}}(x)]^2\,)/2 \qquad \forall\, x \in X \quad (10)$$

Operacja ta nie ma odpowiednika w klasycznej teorii zbiorów, logicznie oznacza „podczas gdy nie". Zbiór $\underset{\sim}{E}$ powstały w wyniku operacji (10) ze zbiorów „stare drzewa" i „wysokie drzewa", oznacza zatem zbiór „drzewa stare lecz nie wysokie":

$$\underset{\sim}{E} = d_1/.50 + d_2/.46 + d_3/.81 + d_4/.72 + \\ + d_5/.70 + d_6/.54 + d_7/.53 + d_8/.49$$

Elementy jednego zbioru lub kilku, mogą pozostawać ze sobą w pewnej współzależności. Możemy wtedy mówić o relacji między nimi. Relacją jest, np. $a < b$, czyli a jest mniejsze od b. Jeśli zbiory nierozmyte $A = \{a\}$ i $B = \{b\}$ stanowią liczby, np. : $A = \{1, 3, 5\}$ i $B = \{2, 7, 5\}$, to relacja mniejszości jest określona przez zbiór R wszystkich par (a,b), dla których a jest mniejsze niż b. W naszym przykładzie mamy więc:

$$R = \{(1,2), (1,7), (1,5), (3,7), (3,5), (5,7)\}$$

Co jednak zrobić, gdy współzależność między danymi elementami nie jest ścisła , tzn. gdy dwa elementy x i y pozostają w relacji nieostrej, nieprecyzyjnej, np. *x jest „nieco mniejsze" niż y*. Nie sposób wtedy wymienić wszystkich par, tak jak zrobiliśmy poprzednio. Możemy natomiast, każdej parze (x,y), przypisać liczbę z przedziału $[0,1]$, mówiącą „w jakim stopniu" relacja jest spełniona. Inaczej mówiąc, dla zależności *x jest „nieco mniejsze" niż y*, określamy zbiór rozmyty $\underset{\sim}{R}$, który wyraża stopień spełnienia relacji dla każdej pary x i y. Relacją rozmytą $\underset{\sim}{R}$, między dwoma zbiorami nierozmytymi A i B, nazywamy zbiór rozmyty określony na iloczynie kartezjańskim $A \times B$:

$$\underset{\sim}{R} = \{((x,y), \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y))\} \quad \forall\, x \in A \quad \forall\, y \in B \quad (11)$$

Przykładem dobrze znanej w ekologii relacji takiego typu, jest podobieństwo między dowolnymi np. zbiorowiskami roślinnymi, wyrażone, za pomocą liczb z zakresu $[0,1]$, stosując jako miarę podobieństwa, np. współczynnik Jaccarda.

Jak wiemy, klasyczna zmienna liczbowa (Z) przyjmuje wartosci (z) będące elementami dowolnego zbioru liczb, powiedzmy $X=\{x\}$. Niech $R(Z)$ oznacza zbiór nierozmyty wszystkich możliwych wartości jakie przyjmuje zmienna Z. Tak zwane równanie przypisujące, przypisuje wartość x zmiennej z przy ograniczeniu $R(Z)$:

$$z = x, \qquad x \in R(Z) \qquad (12)$$

Mówimy, że równanie (12) będzie spełnione wtedy, gdy wartość jaką przyjmuje zmienna Z należy do zbioru $R(Z)$. Dla wszystkich innych wartości x równanie (12) będzie niespełnione. Spotykamy tu więc klasyczną alternatywę logiki dwuwartościowej.

Przyjmijmy, że zmienna Z jest zmienną liczbową nazywaną „wysokość", w znaczeniu „wysokość drzewa". Z może więc przyjmować wartości ze zbioru dodatnich liczb naturalnych $N = \{1, 2, 3, ...\}$. Wiadomo nam, że w lesie drzewa mają, powiedzmy, nie więcej niż 30 m wysokości. Zmienna „wysokość drzewa" przybiera zatem wartości ze zbioru $R(Z) = \{1, 2, 3, ..., 30\}$. Równanie przypisujące (12), będzie spełnione, np. dla $z = 25$ i nie będzie spełnione, np. dla $z = 48$. Zbiór $R(Z)$ nosi nazwę ograniczenia zmiennej Z na przestrzeń X, gdyż pozwala na spełnienie równania przypisującego tylko dla pewnego podzbioru przestrzeni X.

Zmienna rozmyta jest uogólnieniem klasycznej zmiennej liczbowej. Jak należało się spodziewać, może ona przybierać takie wartości, dla których równanie przypisujące jest tylko częściowo spełnione. Rolę ograniczenia, tzw. ograniczenia rozmytego, pełni w tym przypadku zbiór rozmyty $\underset{\sim}{A}(Z)$. Prześledźmy to na przykładzie: w przestrzeni $X = \{d_1, ..., d_8\}$ rozpatrzymy zmienną rozmytą „wysokie", w znaczeniu „wysokie drzewo". Ograniczenie rozmyte dane jest więc funkcją przynależności określającą $\underset{\sim}{R}(Z)$; $\mu_{R(Z)}(x)$. Do obliczeń wykorzystamy funkcję przynależności (3) ze zmienionymi wartościami stałych. Równanie przypisujące:

$$\text{„}\textit{wysokie drzewo}\text{"} = 10$$

jest spełnione w stopniu równym $S(10, 3, 17, 31)$:

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(\text{„wysokie drzewo"})(10) = 0.12$$

Liczba 0.12, oznacza jak dobrze wysokość 10 m odpowiada pojęciu wysokie drzewo. Stopień w jakim spełnione jest równanie przypisujące, nazywamy kompatybilnością lub zgodnością między elementami przestrzeni X a ograniczeniem rozmytym $\underset{\sim}{R}(Z)$.

Szczególnie interesująca jest koncepcja lingwistycznej zmiennej rozmytej Zadeha [31, 32, 33]. Za rozmytą zmienną lingwistyczną, będziemy uważali taką zmienną, której wartości stanowią słowa i zdania języka naturalnego lub sztucznego. Jeśli, np. „wiek" potraktujemy jako zmienną lingwistyczną L, to jej wartości mogą być wyrażone terminami:

L (*wiek*)={*młody, bardzo młody, niestary, stary, bardzo stary*}

Zauważmy, że nie zawsze możemy jednoznacznie zdefiniować każdy termin. Stopień w jakim dany osobnik należy do konkretnej kategorii, można wtedy wyrazić za pomocą funkcji przynależności. Zatem kategorie te stanowią nic innego jak zbiory rozmyte. Tak rozumiana zmienna lingwistyczna jest przykładem zbiorów rozmytych drugiego rzędu.

Zgodnie z podaną definicją, wartości zmiennej lingwistycznej mogą być terminami języka sztucznego, a więc skonstruowanego na podstawie pewnych, dowolnych założeń. Dopuszczalne jest więc praktycznie używanie każdego „języka". Na przykład, symbole stosowane w synekologii do oznaczania udziału ilościowego gatunków w zbiorowisku, możemy interpretować jako zmienną lingwistyczną:

$$L = \{\, r, +, 1, 2, 3, 4, 5 \,\}$$

Wykorzystane znaki są jedynie „terminami" języka, którym posługują się fitosocjolodzy i nie reprezentują wartości konkretnych pomiarów.

Zmienne lingwistyczne mają duże znaczenie wszędzie tam, gdzie do opisu przedmiotów czy zjawisk stosujemy dowolny, naturalny lub sztuczny język. Dla zmiennych lingwistycznych, będących jak pamiętamy zbiorami rozmytymi drugiego rzędu, można zdefiniować podobne operacje, jak dla podstawowych zbiorów rozmytych.

Nieprecyzyjność w przynależności elementu do zbioru, oraz wartości funkcji przynależności z przedziału [0,1], mogą sugerować zbieżność teorii zbiorów rozmytych z rachunkiem prawdopodobieństwa. Jest to tylko pozorna analogia. Zauważmy, że rachunek prawdopodobieństwa pozwala na określenie szansy na należenie lub nie należenie obiektu do pewnego zbioru. Zakłada więc ostro wyznaczone granice i precyzyjnie określone, w kategoriach logiki dwuwartościowej, kryteria przynależności. Teoria zbiorów rozmytych zajmuje się natomiast takimi przypadkami, w których dany element należy do zbioru z pewnym, określonym stopniem przynależności.

Jednym z ciekawszych zagadnień teorii zbiorów rozmytych jest opracowana przez Zadeha [35] teoria możliwości. Jak wspomnieliśmy, ze zmienną rozmytą związane jest pewne ograniczenie rozmyte, nałożone na wartości jakie może przybierać zmienna. Na ograniczenie to możemy spojrzeć jak na „rozkład możliwości" dla zmiennej rozmytej, podobnie jak ma to miejsce z rozkładem prawdopodobieństwa dla klasycznej zmiennej. Zadeh [35] formułuje tzw. prawo zgodności między możliwością i prawdopodobieństwem, które werbalnie przedstawia następująco [36]: „Intuicyjnie, możliwość rozumiemy jako wykonalność, łatwość osiągnięcia czegoś. Prawdopodobieństwo odnosi się natomiast do szansy, częstości wystąpienia jakiegoś zjawiska. Zatem, nie wszystko możliwe jest prawdopodobne i nie wszystko prawdopodobne jest możliwe".

Podstawową koncepcję teorii możliwości zademonstrujemy na bardzo uproszczonym przykładzie, odsyłając zainteresowanych szczegółami do cytowanej w artykule literatury.

Określmy zbiór rozmyty $\underset{\sim}{C}$ „młode drzewa" w przestrzeni $X=\{x\}$:

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$$

Jak widać, definiujemy go jako dopełnienie zbioru rozmytego $\underset{\sim}{A}$ „stare drzewa". Niech Z oznacza zmienną rozmytą „wysokie", w sensie „wysokie drzewo". Załóżmy, że rozkład możliwości dla zmiennej Z dany jest funkcją przynależności (3), innymi słowy, funkcja przynależności $\mu_{\underset{\sim}{R}(Z)}(x)$ wskazuje jaka jest możliwość, że drzewo w przestrzeni X będzie drzewem wysokim. Zadeh [35] podaje wzór na obliczanie miary możliwości:

$$\text{Poss}\,(Z \text{ jest } C) = MAX\,[MIN\,(\mu_{\underset{\sim}{C}}(x), \mu_{\underset{\sim}{R}}(x))] \tag{13}$$

„Poss" pochodzi od angielskiego *„possibility"* (*możliwość*), słowo *„jest"* zamiast znaku $\in$ – oznacza, że mamy na myśli przynależność do zbioru rozmytego, a nie klasycznego. Operacja *MAXMIN* polega na znalezieniu najpierw minimalnej wartości dla każdej pary, $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$, $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x)$ i następnie, największej wartości z wybranych wartości minimalnych. Możemy teraz, korzystając z równania (13), obliczyć Poss (Z jest C), co będziemy interpretować jako możliwość, że drzewo młode jest drzewem wysokim:

	„drzewa młode" $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$	„drzewa wysokie" $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x)$	*MIN*	*MAX*
d_1	0.99	0.00	0.00	–
d_2	0.89	0.12	0.12	–
d_3	0.45	0.09	0.09	–
d_4	0.28	0.28	0.28	0.28
d_5	0.18	0.33	0.18	–
d_6	0.13	0.66	0.13	–
d_7	0.07	0.71	0.07	–
d_8	0.06	0.00	0.00	–

Po wykonaniu operacji *MAXMIN* otrzymamy:

$$\text{Poss}\,(Z \text{ jest } C) = 0.28$$

Oddaje to więc w pełni oczywisty fakt, iż z reguły młode drzewa charakteryzuje mała wysokość.

Wykorzystany przykład jest bardzo prosty i nie prezentuje wszystkich aspektów teorii możliwości. Obliczenia Poss (Z jest C) stają się bardzo kłopotliwe szczególnie, gdy wykorzystujemy zbiory rozmyte wyższych stopni, np. zmienne lingwistyczne [20]. Teoria możliwości pozwala na dokonywanie porównań obiektów, badanie ich przynależności do konkretnych zbiorów rozmytych oraz na tak zwane wnioskowanie rozmyte [36].

PRZYKŁADY WYKORZYSTANIA ZBIORÓW ROZMYTYCH W EKOLOGII

Teoria zbiorów rozmytych znalazła już szerokie zastosowanie w wielu dyscyplinach technicznych, humanistycznych, rolniczych [5, 12, 17, 18]. W badaniach ekologicznych była, jak dotąd, wykorzystywana w niewielkim zakresie, głównie do porządkowania i klasyfikacji obiektów wielocechowych. W ekologii, do porządkowania stosuje się z reguły, różnorodne modele geometryczne, a do często wykorzystywanych metod należą, np. analiza głównych składowych PCA, analiza korespondencji RA [21, 27]. Wszystkie stosowane metody porządkowania zakładają jednoznaczną przynależność obiektu do zbiorów.

Roberts [23] zaproponował, aby do porządkowania zbiorowisk roślinnych wykorzystać teorię zbiorów rozmytych. Roberts [23] definiuje porządkowanie jako odwzorowanie zbioru uporządkowanych par do zbioru wartości lub symboli. Diagram rozproszenia, będący graficzną prezentacją wyników porządkowania w PCA, jest przykładem odwzorowania często stosowanego w ekologii. W porządkowaniu rozmytym, odwzorowanie dotyczy uporządkowanych par wartości funkcji przynależności.

Przyjrzyjmy się metodzie Robertsa na przykładzie, w którym analizuje on zmiany w ilościowym i jakościowym składzie gatunkowym roślinności, obserwowane wraz ze zmianą wysokości położenia prób. Analizie poddano poletka próbne, reprezentujące roślinność leśną. Poletka te charakteryzował nie tylko odmienny skład florystyczny, lecz także zróżnicowane czynniki siedliskowe (położenie nad poziom morza, nachylenie, rodzaj podłoża). Na podstawie składu florystycznego, policzono najpierw podobieństwo (S_{xy}) między wszystkimi poletkami x i y zauważmy, że w terminologii zbiorów rozmytych jest to relacja rozmyta. Następnie zdefiniowano zbiór rozmyty $\underset{\sim}{A}$, obejmujący poletka położone na „dużej" wysokości. Funkcję przynależności $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$, zdefiniowano tak, że czym wyżej położone było poletko, tym większy miało stopień przynależności do zbioru $\underset{\sim}{A}$. Określono też zbiór rozmyty grupujący poletka położone na „małej" wysokości, jako dopełnienie zbioru $\underset{\sim}{A}$, $\mu_{\underset{\sim}{B}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$. Następnie, zdefiniowano zbiór rozmyty $\underset{\sim}{C}$, którego funkcja przynależności była dana wzorem:

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = \left[\sum_{x \neq y} (S_{xy}(\mu_{\underset{\sim}{A}}(y)))\right]\left[\sum_{x \neq y} (\mu_{\underset{\sim}{A}}(y))\right]$$

gdzie $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$, oznacza przynależność poletka x do zbioru $\underset{\sim}{C}$, a $\mu_{\underset{\sim}{A}}(y)$, oznacza przynależność poletka y do zbioru $\underset{\sim}{A}$. Zauważmy, że czym bardziej poletko x jest florystycznie podobne do poletka, które jest położone wysoko, tym większy jest jego stopień przynależności do zbioru $\underset{\sim}{C}$. Zbiór ten możemy traktować jako zbiór *„poletek z roślinnością typową dla dużych wysokości"*. W taki sam sposób zdefinowano zbiór rozmyty $\underset{\sim}{D}$, korzystając z funkcji $\mu_{\underset{\sim}{B}}(y)$, jako zbiór *„poletek z roślinnością typową dla małych wysokości"*.

W końcu, zbiór rozmyty $\underset{\sim}{E}$, którego funkcję przynależności zdefiniowano jako nieprzemienną różnicę zbiorów $\underset{\sim}{C}$ i $\underset{\sim}{D}$; $\mu_{\underset{\sim}{E}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{C}\lceil\underset{\sim}{D}}(x)$ określa poletka *„typowe florystycznie dla dużych wysokości, lecz nietypowe dla małych wysokości"*. Porządkowania poletek przeprowadza się w przestrzeni dwuwymiarowej, której oś x wyznaczona jest przez $\mu_{\underset{\sim}{E}}(x)$, a oś y przez wartości $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$. W ten sposób oś x odpowiada zmianom roślinności od typowej dla poletek leżących na małej wysokości do typowej dla poletek leżących na dużej wysokości. Oś y zaś wyraża rzeczywiste położenie poletek. Interpretacja diagramu rozproszenia zależy od ułożenia punktów w przestrzeni, podobnie jak w klasycznych metodach porządkowania. Tą samą metodą Roberts [23] analizuje wpływ innych czynników na florystyczne zróżnicowanie poletek.

Porządkowanie wykorzystujące zbiory rozmyte polega głównie na tym, że przestrzeń w której umieszcza się obiekty, wyznaczona jest bezpośrednio przez warości czynników siedliskowych, gdyż współrzędne uzyskiwane są na podstawie znanych lub przewidywanych zależności między czynnikami środowiska. Ponadto, tak zwane porządkowanie rozmyte pozwala na nieostrą przynależność obiektu do analizowanej klasy obiektów. Niedogodnością rozmytego porządkowania jest konieczność zdefiniowania postaci funkcji przynależności, a więc aprioryczna waloryzacja znaczenia każdego z czynników w zróżnicowaniu badanych obiektów.

Klasyfikacja, często przeciwstawiana porządkowniu, polega na grupowaniu obiektów w skupienia, na podstawie ich bardzo różnie definiowanego podobieństwa. Klasyczne metody numerycznej analizy skupień, wykorzystywane powszechnie do klasyfikacji, zakładają jednoznaczną przynależność obiektów do wyróżnionych grup [21]. Można jednakże założyć, że dany obiekt należy do skupienia tylko z pewnym stopniem przynależności, wykorzystując koncepcje teorii zbiorów rozmytych [34]. Grupowanie, dopuszczające częściową przynależność obiektu do skupienia, stwarza zdaniem Dalea [9] większe problemy metodyczne niż klasyfikacja deterministyczna. Wymaga bowiem przyjęcia konkretnej liczby skupień, na które dzieli się obiekty oraz definiowania stopnia przynależności obiektu do skupienia.

Klasyfikacja stanowi podstawowe narzędzie fitosocjologii. Dale [8] dokonał obszernego porównania między deterministyczną i „rozmytą" klasyfikacją fitosocjologiczną. W rozmytej analizie skupień przyjął on założenie, że ten sam gatunek lub zdjęcie fitosocjologiczne, mogą w różnym stopniu należeć jednocześnie do kilku wyróżnionych skupień. Zasadniczy wniosek z przeprowadzonych badań, to stwierdzenie, że w przypadku zbiorowiska o trudno definiowalnej przynależności do konkretnej jednostki syntaksonomicznej, metody rozmytej klasyfikacji dają znacznie lepsze rezultaty niż klasyfikacja deterministyczna. Jednocześnie, wyróżnione w wyniku rozmytej klasyfikacji typy roślinności nie stanowią oddzielnych jednostek, odzwierciedlając tym samym naturalną ciągłość szaty roślinnej.

Przykładem zastosowania klasyfikacji rozmytej w ekologii jest praca Young-Hung [29], który badał wpływ wypasania zwierząt na degradację roślinności stepowej. Stwierdził on, że biomasa dominujących gatunków oraz zróżnicowanie florystyczne obserwowane na poletkach próbnych ulegają płynnym zmianom. Do analizy zależności między zmianami roślinności na poletkach próbnych a intensywnością wypasania wykorzystał więc rozmytą analizę skupień. Feoli i Zuccarello [11] wykorzystali teorię zbiorów rozmytych do analizy dynamiki fitocenoz. Wyszli oni z założenia, że za podstawę wyróżniania zbiorowisk roślinnych służą gatunki oraz próby. Ten sam gatunek można spotkać w różnych zbiorowiskach, a zdjęcia fitosocjologiczne, składające się na określone zbiorowisko, przydziela się do konkretnego typu na podstawie obecności w nich określonych gatunków roślin. Zatem, zarówno zdjęcia, jak i gatunki tworzące konkretne zbiorowisko, w różnym stopniu należą do wyróżnionej klasy. Nic więc nie stoi na przeszkodzie aby jednostki syntaksonomiczne traktować jak zbiory rozmyte.

Autorzy zaprezentowali metodę obliczania rozmytego stopnia przynależności gatunków i zdjęć do określonej jednostki syntaksonomicznej. Jednocześnie zdefiniowali nowe zbiory rozmyte, nazywane *siedliskowymi zbiorami rozmytymi* (environmental fuzzy sets – EFS). Nieformalnie EFS są to zbiory rozmyte, w których określa się stopień przynależności każdego zdjęcia i każdego gatunku do zbioru warunków siedliskowych. Formalne przedstawienie użytych w pracy metod, wymagałoby stosowania elementarnego rachunku macierzowego. Tak określone zbiory rozmyte, służą następnie do nierozmytego porządkowania jednostek syntaksonomicznych i badania korelacji między czynnikami siedliskowymi a dynamiką roślinności.

Zasadnicze wyniki pracy Feoliego i Zuccarello [11], to opracowanie metody do przekształcania klasycznych zbiorów, jakimi są jednostki syntaksonomiczne, w zbiory rozmyte. Ponadto autorzy dowodzą, że możliwe jest określenie warunków bytowych roślin na podstawie analizy dynamiki zbiorowisk roślinnych, wykorzystującej teorię zbiorów rozmytych.

Współcześnie wykorzystywane modele dynamiki roślinności, np. łańcuchy Markowa, wymagają dokładnego, ilościowego określenia prawdopodobieństwa zmian w kolejnych etapach sukcesji. Dane takie są niezwykle trudne do uzyskania, co znacznie ogranicza możliwości symulacji numerycznych badanych zjawisk. Roberts [26] zaproponował zastosowanie teorii grafów rozmytych do analizy dynamiki roślinności lasu. Podstawę metody stanowią relacje rozmyte, wiążące ze sobą wszystkie gatunki obserwowane w czasie sukcesji. Zmiany ilościowe w składzie florystycznym lasu obliczano na podstawie rozmiaru, jaki zajmowały korony drzew w stosunku do określonej wielkości powierzchni próbnej w różnych etapach sukcesji. Na przykład, jeśli korona drzewa gatunku *b* w kolejnym stadium sukcesji zajmuje taki sam procent powierzchni próbnej co korona gatunku *a* w poprzednim stadium, a gatunek *a* nie występuje na powierzchni próbnej, to relacja między nimi jest całkowicie spełniona. Relacje rozmyte stanowią następnie podstawę do utworzenia grafów rozmytych [22], które ilustrują zachodzące i przewidywane zmiany roślinności.

W badaniach synekologicznych zainteresowani jesteśmy nie tylko florystycznym składem zbiorowiska, ale i charakterystyką ekologiczną występujących w nim gatunków roślin. Ilościowa analiza zbiorowisk, ujmująca łącznie skład florystyczny, warunki bytowania roślin oraz ich charakterystytkę ekologiczną, wymaga utworzenia zbioru, którego elementy stanowią pojedynczy, syntetyczny wskaźnik zróżnicowania badanych zbiorowisk. Do konstrukcji takich zbiorów używa się najczęściej matematycznego aparatu algebry liniowej [3, 10].

Borysławski i Krusińska [4], zaproponowali nową metodę połączenia danych florystycznych i ekologicznych, stosując elementy lingwistyki rozmytej. Jako przykład wykorzystali dane opisujące 22 typy lasów iglastych z Europy i charakterystykę form życiowych 300 występujących w nich gatunków roślin.

Każdą z 13 wyróżnionych form życiowych określono jako zmienną lingwistyczną, której terminy stanowiły analizowane zbiorowiska. Poszczególny termin opisywał przynależność danego typu lasu do konkretnej zmiennej lingwistycznej. Dla przykładu, zmienna lingwistyczna *terofity*, składała się z 22 terminów, których wartości określono za pomocą odpowiednich funkcji przynależności. Wartość liczbowa funkcji mówiła, w jakim stopniu konkretny *las iglasty* decyduje o wartościach jakie przyjmuje zmienna lingwistyczna *terofity*.

W ten sposób, dwa duże zbiory danych zostały zredukowane do tablicy o rozmiarach 13 x 22, która może być analizowana metodami matematyki rozmytej lub dowolnymi metodami analizy wielozmiennej. W pracy podano algorytm opisujący w jaki sposób przekształcić dane florystyczne i ekologiczne na postać lingwistyczną.

Racjonalna ochrona środowiska i eksploatacja zasobów przyrody, wymagają podejmowania wielu alternatywnych rozstrzygnięć. Mendoza i Sprouse [19] dyskutują możliwość wykorzystania tak zwanego wnioskowania rozmytego w planowaniu ochrony i eksploatacji terenów leśnych Shawnee w USA. Rozstrzygnięcia dotyczące tych terenów muszą uwzględniać maksymalizację zysków ekonomicznych, zwiększenie obszaru lasów przeznaczonych na rekreację oraz pozostawienie możliwie jak największej powierzchni niezakłócanej zarówno przez eksploatację drewna, jak i przez turystykę. Rozwiązania dotyczą więc nie tylko aspektów biologicznych, lecz także problematyki ekonomicznej i społecznej. Konieczne jest więc podejmowanie optymalnych decyzji w warunkach, gdzie nie wszystkie przesłanki są jednoznacznie i precyzyjnie określone, tzn. w „środowisku rozmytym". Mendoza i Spruse [19] proponują aby problem ten rozwiązywać za pomocą tzw. programowania rozmytego [15, 22]. Analiza alternatywnych rozwiązań oraz wynikające z nich wnioski uzyskuje się wykorzystując rozmyte algorytmy generujące i rozmyte algorytmy decyzyjne. Autorzy podkreślają, że w przypadku tak złożonych problemów jak ochrona lasów, wnioskowanie rozmyte jest bardziej naturalne niż rozumowanie oparte o klasyczną alternatywę. Jednocześnie, algorytmy rozmyte umożliwiają większą elastyczność w podejmowaniu konkretnych decyzji.

Roberts [24] wprowadził do synekologii dynamiczną teorię systemów. Jej rozszerzeniem było wykorzystanie zbiorów rozmytych do analizy struktury i dynamiki szaty roślinnej zaproponowane przez tego samego autora [25]. Dokładna, formalna prezentacja metod stosowanych przez Robertsa wykracza poza ramy tego artykułu, przedstawimy jedynie kluczowe założenia rozmytej teorii systemowej.

Do podstawowych pojęć analizy systemowej należą: parametry wejściowe systemu i stan systemu [6]. Zmiany stanu systemu, wyznaczane są przez stałe parametry wejściowe oraz zmienne systemu. W koncepcji Robertsa [25], parametry wejściowe, jak i stan układu uważane są za zbiory rozmyte. W szczególności, każdy możliwy stan układu jest podzbiorem rozmytym.

Przyjmijmy, że stan układu w danej chwili oznacza zbiorowisko roślin, jest więc zbiorem rozmytym, nazwijmy go $\underset{\sim}{A}$. Dla każdego z gatunków występujących w tym zbiorowisku możemy więc określić stopień przynależności do zbioru $\underset{\sim}{A}$. Jeśli początkowe stadium sukcesji zdefiniujemy jako zbiór rozmyty $\underset{\sim}{A}$, a stadium końcowe jako zbiór rozmyty $\underset{\sim}{B}$, to sukcesję zbiorowiska X będzie ilustrować malejąca przynależność X do zbioru $\underset{\sim}{A}$ i rosnąca do zbioru $\underset{\sim}{B}$.

O zmianach szaty roślinnej decyduje zespół czynników biotycznych i abiotycznych, składający się na warunki bytowania roślin. W teorii Robertsa [25] warunki bytowania stanowią przestrzeń, w której każdy dowolny zespół czynników tworzy zbiór rozmyty. Tak jak konkretne zbiorowisko ilustruje stan układu w przestrzeni wszystkich zbiorowisk, tak konkretny zespół warunków środowiska odpowiada stanowi układu w przestrzeni wszystkich możliwych warunków środowiska. Każdy taki stan można więc też przedstwić w postaci zbioru rozmytego.

Roberts [25] prezentuje odmienne od dotychczasowego ujęcie amplitudy ekologicznej gatunku. W miejsce interpretacji geometrycznej, tj. amplitudy ekologicznej określonej w postaci przestrzeni wielowymiarowej wyznaczonej przez zespół warunków środowiska, autor [25] proponuje ujęcie amplitudy w kategoriach rozmytych. Przyjmuje on, że amplituda ekologiczna gatunku określona jest przez „możliwości" (Poss) występowania organizmu w danych warunkach środowiska. W oparciu o powyższe założenia, zależność między warunkami bytowymi roślin a składem gatunkowym zbiorowiska, możemy teraz rozpatrywać jako relacje rozmyte, a nie jak to się najczęściej czyni, przez zależności funkcyjne analizy matematycznej.

Konsekwencją tak definiowanych zależności między środowiskiem a roślinnością, jest sposób analizy dynamiki szaty roślinnej. Zmiany stanu systemu, np. szaty roślinnej na tle zmieniających się warunków w środowisku, można badać korzystając z tak zwanych złożeń relacji n-argumentowych [5]. Przedstawiona tu teoria Robertsa [25] ma, jak dotąd, raczej pojęciowe znaczenie, jednakże ze względu na precyzyjnie sformułowany aparat matematyczny, może znaleźć praktyczne zastosowanie.

PODSUMOWANIE

Zbiory rozmyte nie stanowią nowej kategorii zbiorów. Każdy zbiór rozmyty można przedstawić w postacie zbioru klasycznego [22]. U podstaw tej teorii nie leży nowy aparat matematyczny, a swoiste rozumowanie o otaczającej nas rzeczywistości. Jest rzeczą gustu, a ściślej przyjętych założeń, czy uznamy, że badane zjawisko można analizować za pomocą metod klasycznych, czy też rozumowanie na podstawie logiki dwuwartościowej uważamy za niewystarczające.

Teoria zbiorów rozmytych, umożliwia spojrzenie na wiele zagadnień ekologicznych jako na tak zwane „miękkie" zadania analizy systemowej [18]. Jeśli decydujemy się na takie podejście metodologiczne, koncepcja Zadeha oferuje obszerny, precyzyjny, analityczny i numeryczny aparat matematyczny. Jednakże, opisując procesy ekologiczne w języku teorii zbiorów rozmytych, należy pamiętać , że jak zauważa Gould [13], nasze myślenie o rzeczywistości przyrodniczej zależy od języka jakim tę rzeczywistość opisujemy.

Od momentu ogłoszenia podstaw teorii zbiorów rozmytych, została ona rozszerzona na wiele dyscyplin matematyki. Mamy więc rozmytą algebrę, rozmyty rachunek prawdopodobieństwa, rozmytą teorię informacji i rozmytą analizę systemową. W wielu dziedzinach, gdzie stosuje się klasyczną matematykę, można więc wykorzystać matematykę rozmytą. Nie wykluczone więc, że i ekolodzy znajdą dla siebie coś interesującego w tej ciekawej koncepcji.

LITERATURA

[1] Batschelet E. 1979. Introduction to mathematics for life science. Springer, New York, ss. 643.

[2] Berlinski D. 1986. The language of life. W: J. L. Casti, A. Karlquist (red.), *Biomathematics 16, Complexity, language and life: Mathematical approaches*, ss. 231–267. Springer, New York.

[3] Boryslawski Z. R., Szyjkowski A. 1988. Numerical analysis of sessile algae communties in mountain streams. *Acta Hydrobiologica* **30**: 329–340.

[4] Boryslawski Z. R., Krusińska E. 1989. Fuzzy linguistic concept in redescription of vegetation data. *Coenoses* **4**: 169–173.

[5] Czogała E., Pedrycz W. 1985. Elementy i metody teorii zbiorów rozmytych. PWN, Warszawa, ss. 202.

[6] Dale M. B. 1970. Systems analysis and ecology. *Ecology* **51**: 2–16.

[7] Dale M. B. 1979. On linguistic approaches to ecosystems and their classification. W: L. Orloci, C. R. Rao, W. M. Stiteler (red.), *Multivariate methods in ecological work*, ss. 11–20. International Co-operative Publishing House, Maryland.

[8] Dale M. B. 1988. Some fuzzy approaches to phytosociology: Ideals and instances. *Folia Geobot. Phytotaxon.* **23**: 239–274.

[9] Dale M. B. 1988b. Knowing when to stop: Cluster concept concept cluster. *Coenoses* **3**: 11–33.

[10] Feoli E., Scimone M. 1984. A quantitative view on textural analysis of vegetation and example of application of some methods. *Archivio Botanico e Biogeografico Italiano* **60**: 71–94.

[11] Feoli E., Zuccarello V. 1988. Syntaxonomy: a source of useful fuzzy sets for environmental analysis? *Coenoses* **3**: 141–147.

[12] Gerstenkorn T., Rakus E. 1990. O użyteczności pojęć zmiennej rozmytej i zmiennej lingwistycznej w naukach przyrodniczych. *Listy Biometryczne* **27**: 3–12.

[13] Gould P. 1986. Allowing, forbidding but not requairing: A mathematic for human world. W: J. L. Casti, A. Karlquist (red.), *Biomathematics 16, Complexity, language and life: Mathematical approaches*, ss. 1–20. Springer, New York.

[14] Hanna S. C., Saber J. C. 1971. Sets and logic. Richard D. Irwin, Inc., Ontario, ss.274.

[15] Heilpern S. 1980. Wybrane zagadnienia z teorii zbiorów rozmytych. *Matematyka Stosowana* **16**: 27–38.

[16] Jasieński M. 1988. O metodzie ekologii, czyli dlaczego nie trzeba być holistą (echa dawnych dyskusji i świeżej lektury). *Wiad. Ekol.* **34**: 432–445.

[17] Jones A., Kaufman A., Zimmerman H. J. (red.). 1986. Fuzzy sets Theory and applications. D. Reidel Publishing Comp., Dortrecht, ss. 403.

[18] Kacprzyk J. 1986. Zbiory rozmyte w analizie systemowej PWN. Warszawa, ss. 522.

[19] Mendoza G. A., Sprouse W. 1989. Forest planning and decision making under fuzzy environments: An overview and illustration. *Forest Science* **35**: 481–502.

[20] Milanese M., Molino G., Belforte G. , Cravetto C., Frediani S., Bona B., Saitta L. 1980. Quantitative and qualitative evaluation of liver deseases. W: J. T. O'Neill (red.), *Proceedings of the forth annual symposium on computer applications in medical care*, ss. 555–563. IEEE Computer Society Publication Office, New York.

[21] Orloci L., Kenkel N. 1985. Introduction to data analysis International Co-operative Publishing House, Maryland, ss. 300.

[22] Ostasiewicz W. 1980. O zbiorach rozmytych. *Matematyka Stosowana* **16**: 5-26.

[23] Roberts D. W. 1986. Ordination on the basis of fuzzy set theory. *Vegetatio* **66**: 123–131.

[24] Roberts D. W. 1987. A dynamical systems perspectives on vegetation theory. *Vegetatio* **69**: 27–33.

[25] Roberts D. W. 1989. Fuzzy system vegetation theory. *Vegetatio* **83**: 71–80.

[26] Roberts D. W. 1989. Analysis of forest succession with fuzzy graph theory. *Ecological Modelling* **45**: 261–274.

[27] Ter Braak C. J. F. 1987. Unimodal models to relate species to environment, Groep Landbouwwiskunde, Wageningen, ss. 151.

[28] Uchmański J. 1980. Czy matematyka jest językiem ekologii? *Wiad. Ekol.* **26**: 221–231.

[29] Young-Hung L. 1989. Impact of grazing on *Aneurolepidium chinense* steppe and *Stipa grandis* steppe. *Acta Oecol. Appl.* **10**: 31–46.

[30] Zadeh L. A. 1965. Fuzzy sets. *Information and Control* **8**: 338–353.

[31] ZADEH L. A. 1975. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning I. *Information Sciences* **8**: 199–249.

[32] ZADEH L. A. 1975. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning II. *Information Sciences* **8**: 301–357.

[33] ZADEH L. A. 1976. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning III. *Information Sciences* **9**: 43–80.

[34] ZADEH L. A. 1976. Fuzzy sets and application in pattern recognition and cluster analysis. W: J. VAN RYZIN (red.), *Classification and clustering*, ss. 208–247. Academic Press, New York.

[35] ZADEH L. A. 1978. Fuzzy sets as a basis for theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems* **1**: 3–28.

[36] ZADEH L. A. 1979. A theory of approximate reasoning. W: J. HAYES, D. MICHIE, L. I. MIKULICH (red.), *Machine intelligence*, ss. 149–194. Halstead Press, New York.